МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра МИС и ПО

Методические указания
к выполнению контрольной работы №2 по теме:
" Дифференциальное и интегральное исчисления функций нескольких переменных. Дифференциальные уравнения "
по дисциплине **"Математика "**
для направления
19.03.04 Технология продукции и организация общественного питания
направленности/специализации
Технология продукции и организация ресторанного дела
для обучающихся очной формы обучения

Мурманск
2020 г.

Оглавление

Введение.

Методические указания к выполнению контрольной работы содержат задания на выполнение КР**№2 " Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных. Дифференциальные уравнения"** по дисциплине **"Математика "**, а также решение примерного варианта КР.

Контрольная работа по дисциплине выполняется в соответствии с учебным планом по специальности/направлению.

Целью КР являются систематизация, расширение и углубление знаний, полученных при теоретическом изучении дисциплины. Необходимо, чтобы обучающийся мог использовать полученные знания на практике.

Приступая к выполнению, обучающийся должен ознакомиться с соответствующими разделами программы курса и методическими указаниями.

КР должна быть выполнена и представлена в срок, установленный кафедрой.

При выполнении задания необходимо руководствоваться следующими требованиями:

1. В работе должен быть указан номер варианта работы.
2. Вариант каждой задачи выбирается по последней цифре номера зачетной книжки. Самовольная замена одного варианта задания другим не разрешается.
3. Перед решением задания должно быть приведено его условие.
4. Решение задания следует сопровождать развернутыми расчетами и пояснениями.
5. Выполненная работа должна быть оформлена в соответствии с требованиями по оформлению письменных работ.
6. После получения прорецензированной работы студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты, а также выполнить все рекомендации.
7. Студенты, не получившие зачета по предусмотренным учебным планом письменным работам, к экзамену не допускаются.
8. Работы, выполненные не по своему варианту, рецензированию не подлежат.

Задания для выполнения

КР №2 "Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных. Дифференциальные уравнения"

<u>Задача 1.</u> Дана функция $z = f(x, y)$. Требуется:

1) найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ и полный дифференциал dz;

2) показать, что для данной функции справедливо равенство: $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

Номер варианта	Функция	Номер варианта	Функция
1	$z = \ln(\sqrt{x} + 2y^3)$	2	$z = (y^2 - x)\arcsin(2x)$
3	$z = \mathrm{tg}(x - 5y^2)$	4	$z = e^{-x^2}(y + 4x)^2$
5	$z = e^{x+3y} + \cos(xy)$	6	$z = \ln^3(2y - x)$
7	$z = x\cos(3x + 2y)$	8	$z = \sqrt{3y - \sin x}$
9	$z = x^y + \sin(x - y)$	10	$z = 4xy^5 - e^{x^2-3y}$

<u>Задача 2.</u> Поверхность σ задана уравнением $z = f(x, y)$. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности σ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащей ей, если x_0, y_0 – заданные числа.

Номер варианта	Уравнение поверхности	Значения x_0, y_0
1	$z = 3y - x^2y + x$	$x_0 = 1,\ y_0 = 5$
2	$z = \frac{x^2}{y} + 3x - y^2$	$x_0 = 1,\ y_0 = -1$
3	$z = \sqrt{xy} + x^3 - 5$	$x_0 = 1,\ y_0 = 4$
4	$z = y^3x - y + x^2$	$x_0 = -1,\ y_0 = 2$
5	$z = \cos y + 2x^2 - xy$	$x_0 = 2,\ y_0 = 0$
6	$z = xy + y^3 + 2x$	$x_0 = 2,\ y_0 = 1$
7	$z = \ln(2x) - xy^3 + y$	$x_0 = \frac{1}{2},\ y_0 = 2$
8	$z = e^y + x^2y - x^4 + 1$	$x_0 = -1,\ y_0 = 0$
9	$z = y\sin x + 3y^2$	$x_0 = \frac{\pi}{2},\ y_0 = -1$

10	$z = 2y - \dfrac{y}{x^2} + x^5$	$x_0 = 1,\ y_0 = 3$

Задача 3. Дано скалярное поле $U = U(x, y)$, точка $M_0(x_0, y_0)$ и вектор $\vec{s}$.

1) найти градиент поля в точке M_0 и производную $\dfrac{\partial U}{\partial s}$ функции $U(x, y)$ в точке M_0 по направлению вектора $\vec{s}$;

2) найти уравнения линий уровня поля U, построить в системе координат xOy 4-5 линий уровня, в том числе линию, проходящую через точку M_0; изобразить вектор $\overrightarrow{gradU}(M_0)$ на этом чертеже.

Номер варианта	Скалярное поле	Точка M_0 (x_0, y_0)	Вектор $\vec{s}$
1	$U = x^2 + 3y^2$	$M_0(1, 1)$	$\vec{s} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$
2	$U = x^2 - 2y^2$	$M_0(2, 1)$	$\vec{s} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$
3	$U = -3y - x^2$	$M_0(-1, -1)$	$\vec{s} = \vec{i} + 2\vec{j}$
4	$U = y^2 - 4x$	$M_0(-2, 1)$	$\vec{s} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$
5	$U = 2x^2 - y^2$	$M_0(1, 1)$	$\vec{s} = -\vec{i} - 3\vec{j}$
6	$U = 2x^2 + y^2$	$M_0(1, 2)$	$\vec{s} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$
7	$U = x^3 - y$	$M_0(1, -2)$	$\vec{s} = -2\vec{i} + \vec{j}$
8	$U = 2x + y^2$	$M_0(-2, 1)$	$\vec{s} = \vec{i} + \vec{j}$
9	$U = (x + 1)^2 + y^2$	$M_0(0, 2)$	$\vec{s} = \vec{i} - 2\vec{j}$
10	$U = 3x^2 - y^2$	$M_0(1, -1)$	$\vec{s} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$

Задача 4. Используя двойной интеграл, вычислить статический момент относительно оси Ox тонкой однородной пластинки, имеющей форму области D, ограниченной заданными линиями. Построить чертеж области интегрирования.

Номер варианта	Границы области D	Номер варианта	Границы области D
1	$x + y = 3,\ x = 2y^2,\ y = 0$	2	$x + y = 1,\ x^2 = y - 1,\ x = 1$
3	$y = x + 1,\ 1 - x = y^2,\ y = 0$	4	$y = x^2,\ 2y = x^2,\ x = 2$
5	$xy = 2,\ y = 2x,\ x = 2$	6	$x + y = 0,\ x^2 = y,\ y = 1$
7	$x + y = 2,\ y = x^3,\ x = 0$	8	$xy = 1,\ x = y,\ y = 2$

9	$y = x + 2,\ y = x^2$	10	$x = y,\ 2x + y^2 = 0,\ y = 2$

Указание. Считать плотность вещества $\gamma(x, y) \equiv 1$.

<u>Задача 5.</u> Используя тройной интеграл в цилиндрической системе координат, вычислить массу кругового цилиндра, нижнее основание которого лежит в плоскости *xOy*, а ось симметрии совпадает с осью *Oz*, если заданы радиус основания *R*, высота цилиндра *H* и функция плотности $\gamma = \gamma(\rho)$, где ρ – полярный радиус точки.

№ Варианта	Размеры цилиндра, плотность вещества	№ варианта	Размеры цилиндра, плотность вещества
1	$R = 1$, $H = 0{,}5$, $\gamma = (2-\rho)^2$	2	$R = 2$, $H = 0{,}5$, $\gamma = 2+\rho^2+\rho^3$
3	$R = 1$, $H = 3$, $\gamma = 2\rho+\sqrt{\rho}+3$	4	$R = 2$, $H = 1$, $\gamma = \left(1+\dfrac{\rho}{2}\right)^2$
5	$R = 2$, $H = 0{,}5$, $\gamma = 6\rho-3\rho^2+2$	6	$R = 3$, $H = 1$, $\gamma = \dfrac{\rho}{3}+\dfrac{\rho^3}{9}+2$
7	$R = 1$, $H = 2$, $\gamma = 4\rho^2+\rho+5$	8	$R = 4$, $H = 0{,}25$, $\gamma = \rho^2+5\sqrt{\rho}+2$
9	$R = 1$, $H = 0{,}1$, $\gamma = (3+2\rho)^2$	10	$R = 1$, $H = 5$, $\gamma = 3\rho+5\rho^3+1$

<u>Задача 6.</u> Дано дифференциальное уравнение 1-го порядка и точка *M*. Определить тип дифференциального уравнения. Найти общее решение дифференциального уравнения, уравнение интегральной кривой, проходящей через точку *M* и уравнения еще 4-х интегральных кривых (любых). Построить все эти кривые в системе координат.

№ варианта	Дифференциальное уравнение	Точка
1	$xy' + y = 0$	$M(-2;\ 4)$
2	$y'(x^2-4) = 2xy$	$M(0;\ 3)$
3	$\sin^2 x \cdot y' = 1$	$M\left(\dfrac{\pi}{4}; -1\right)$
4	$y' = \sqrt{1-y^2}$	$M(0;\ 1)$
5	$2\sqrt{x} \cdot y' = 1$	$M(1;\ 2)$
6	$\mathrm{tg} x \cdot y' - y = 0$	$M\left(-\dfrac{\pi}{2};\ 2\right)$

7	$y' \cdot \sqrt{1-x^2} + x = 0$	$M(0; -1)$
8	$y' = 3\sqrt[3]{y^2}$	$M(0; 1)$
9	$y' - 2(x-1) = 0$	$M(2; 1)$
10	$xy' = 3y$	$M(-1; 2)$

<u>Задача 7.</u> Дано дифференциальное уравнение 2-го порядка. Определить тип дифференциального уравнения и найти его общее решение, используя метод неопределенных коэффициентов.

№ варианта	Дифференциальное уравнение	№ варианта	Дифференциальное уравнение
1	$y'' - 2y' + y = e^{-x}(4x^2 + 2)$	6	$y'' + y' = xe^{-x}$
2	$y'' + 4y = 3\sin x + 5\cos x$	7	$y'' + y = x^2 e^x$
3	$y'' + y' - 2y = 3e^x$	8	$y'' + 2y' + 5y = 17\cos 2x$
4	$y'' + 6y' + 9y = 6\sin 3x$	9	$y'' + 4y' + 4y = e^x(3x + 2)$
5	$y'' + 9y = e^x(10x - 1)$	10	$y'' - y' = x^2$

<u>Задача 8.</u> Дана система линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Найти общее решение системы методом повышения порядка.

№ варианта	Система дифференциальных уравнений	№ варианта	Система дифференциальных уравнений
1	$\begin{cases} x' = 4x + 6y \\ y' = 4x + 2y \end{cases}$	6	$\begin{cases} x' = -5x - 4y \\ y' = -2x - 3y \end{cases}$
2	$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 8x + y \end{cases}$	7	$\begin{cases} x' = 6x + 3y \\ y' = -8x - 5y \end{cases}$
3	$\begin{cases} x' = 5x + 8y \\ y' = 3x + 3y \end{cases}$	8	$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x + 8y \end{cases}$
4	$\begin{cases} x' = 2x + 8y \\ y' = x + 4y \end{cases}$	9	$\begin{cases} x' = -x + 5y \\ y' = x + 3y \end{cases}$
5	$\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = -x + 4y \end{cases}$	10	$\begin{cases} x' = 7x + 2y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$

Решение примерного варианта КР №2

Задача 1. Дана функция $z = \cos^2(2x - y)$. Требуется:

1) найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$;

2) найти полный дифференциал dz;

3) показать, что для данной функции справедливо равенство: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Решение.

1) При нахождении $\frac{\partial z}{\partial x}$ считаем аргумент y постоянным:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\cos^2(2x - y))'_x = 2\cos(2x - y)(\cos(2x - y))'_x =$$

$$= 2\cos(2x - y)(-\sin(2x - y))(2x - y)'_x = -2\cos(2x - y)\sin(2x - y)((2x)'_x - (y)'_x) =$$

$$= -2\cos(2x - y)\sin(2x - y)(2 - 0) = -\sin(2(2x - y))2 = -2\sin(4x - 2y).$$

При нахождении $\frac{\partial z}{\partial y}$ считаем аргумент x постоянным:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\cos^2(2x - y))'_y = 2\cos(2x - y)(\cos(2x - y))'_y =$$

$$= 2\cos(2x - y)(-\sin(2x - y))(2x - y)'_y = -2\cos(2x - y)\sin(2x - y)((2x)'_y - (y)'_y) =$$

$$= -\sin(2(2x - y))(0 - 1) = \sin(4x - 2y).$$

2) По формуле (1) находим полный дифференциал функции:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = -2\sin(4x - 2y)dx + \sin(4x - 2y)dy.$$

3) Найдем смешанные частные производные второго порядка.

Для того, чтобы найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, дифференцируем $\frac{\partial z}{\partial x}$ по y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = (-2\sin(4x - 2y))'_y = [\textit{считаем } x \textit{ постоянным}] =$$

$$= -2\cos(4x - 2y)(4x - 2y)'_y = -2\cos(4x - 2y)(0 - 2) = 4\cos(4x - 2y).$$

Для того, чтобы найти $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, дифференцируем $\frac{\partial z}{\partial y}$ по x:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (\sin(4x-2y))'_x = [\textit{считаем } y \textit{ постоянным}] =$$

$$= \cos(4x-2y)(4x-2y)'_x = \cos(4x-2y)(4-0) = 4\cos(4x-2y).$$

Получили: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4\cos(4x-2y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 4\cos(4x-2y) \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

Ответы: 1) $\frac{\partial z}{\partial x} = -2\sin(4x-2y)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \sin(4x-2y)$;

2) $dz = -2\sin(4x-2y)dx + \sin(4x-2y)dy$;

3) равенство $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ выполнено.

<u>Задача 2.</u> Поверхность σ задана уравнением $z = \frac{y}{x} + xy - 5x^3$. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности σ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащей ей, если $x_0 = -1$, $y_0 = 2$.

<u>Решение.</u>

Найдем частные производные функции:

$$f'_x(x, y) = \left(\frac{y}{x} + xy - 5x^3\right)'_x = -\frac{y}{x^2} + y - 15x^2;$$

$$f'_y(x, y) = \left(\frac{y}{x} + xy - 5x^3\right)'_y = \frac{1}{x} + x.$$

Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит поверхности σ, поэтому можно вычислить z_0, подставив заданные $x_0 = -1$ и $y_0 = 2$ в уравнение поверхности:

$$z = \frac{y}{x} + xy - 5x^3 \Rightarrow z_0 = \frac{2}{-1} + (-1)\,2 - 5\,(-1)^3 = 1.$$

Вычисляем значения частных производных в точке $M_0(-1, 2, 1)$:

$$f'_x(M_0) = -\frac{2}{(-1)^2} + 2 - 15(-1)^2 = -15; \quad f'_y(M_0) = \frac{1}{-1} - 1 = -2.$$

Получаем уравнение касательной плоскости к поверхности σ в точке M_0:

$$z-1=-15(x+1)-2(y-2) \;\Rightarrow\; 15x+2y+z+10=0.$$

Получаем канонические уравнения нормали к поверхности σ в точке M_0: $\dfrac{x+1}{-15}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$.

Ответы: уравнение касательной плоскости: $15x+2y+z+10=0$; уравнения нормали: $\dfrac{x+1}{-15}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$.

Задача 3. Дано плоское скалярное поле $U=x^2-2y$, точка $M_0(1,-1)$ и вектор $\vec{s}=2\vec{i}-\vec{j}$. Требуется:

1) найти уравнения линий уровня поля;

2) найти градиент поля в точке M_0 и производную $\dfrac{\partial U}{\partial s}$ в точке M_0 по направлению вектора $\vec{s}$;

3) построить в системе координат xOy 4-5 линий уровня, в том числе линию уровня, проходящую через точку M_0, изобразить вектор $\overrightarrow{grad\,U}(M_0)$ на этом чертеже.

Решение.

1) Для $U=x^2-2y$ уравнение семейства линий уровня имеет вид $x^2-2y=C$ или $y=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{C}{2}$, где C – произвольная постоянная. Это семейство парабол, симметричных относительно оси Oy (ветви направлены вверх) с вершинами в точках $(0,-\dfrac{C}{2})$.

1) Найдем частные производные функции $U=x^2-2y$:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=(x^2-2y)'_x=2x,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=(x^2-2y)'_y=-2.$$

В точке $M_0(1,-1)$ значения частных производных: $\left.\dfrac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0}=2$, $\left.\dfrac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0}=-2$.

По формуле (6) находим градиент поля в точке M_0:

$$\overrightarrow{grad\,U}(M_0)=\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0}\cdot\vec{i}+\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0}\cdot\vec{j}=2\vec{i}-2\vec{j}.$$

Прежде, чем найти производную по направлению вектора $\vec{s}=2\vec{i}-\vec{j}=$ $=\{2;-1\}$, вычислим его модуль и направляющие косинусы:

$$\left|\vec{s}\right| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}\,,\ \cos\alpha = \frac{s_x}{\left|\vec{s}\right|} = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\beta = \frac{s_y}{\left|\vec{s}\right|} = \frac{-1}{\sqrt{5}}.$$

Производная поля по направлению вектора $\vec{s}$ в точке M_0:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial s}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \cos\beta = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} - 2\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

3) Для построения линий уровня в системе координат xOy подставим в уравнение семейства линий уровня $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{C}{2}$ различные значения C:

при $C = 0$ получим $y = \dfrac{x^2}{2}$ – уравнение линии уровня, соответствующей значению $U = 0$;

при $C = -2$ получим $y = \dfrac{x^2}{2} + 1$ (для $U = -2$);

при $C = 2$ получим $y = \dfrac{x^2}{2} - 1$ (для $U = 2$);

при $C = -4$ получим $y = \dfrac{x^2}{2} + 2$, и т.д.

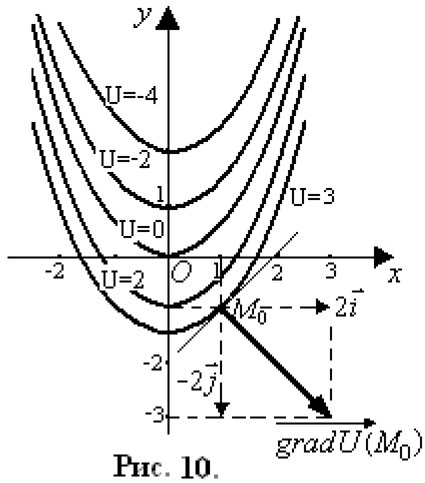

Рис. 10.

Получим уравнение линии уровня, проходящей через точку $M_0(1,-1)$. Для этого вычислим значение функции U в этой точке: $U\big|_{M_0} = \left(x^2 - 2y\right)\Big|_{\substack{x=1\\ y=-1}} = 3 \;\Rightarrow\; C = 3 \;\Rightarrow\; y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{2}$.

Построим эти линии в системе координат xOy.

Для построения градиента поля в точке M_0 нужно отложить от точки M_0 проекции градиента в направлениях координатных осей и построить вектор $\overrightarrow{gradU}(M_0)$ по правилу параллелограмма.

В данном случае $\overrightarrow{gradU}(M_0) = 2\vec{i} - 2\vec{j} = \{2; -2\}$, поэтому откладываем от точки $M_0(1,-1)$ две единицы вдоль оси Ox, две единицы в направлении, противоположном оси Oy и получаем вектор $\overrightarrow{gradU}(M_0) = 2\vec{i} - 2\vec{j}$ как диагональ параллелограмма, построенного на векторах $2\vec{i}$ и $-2\vec{j}$.

Ответы: 1) $x^2 - 2y = C$; 2) $\overrightarrow{gradU}(M_0) = 2\vec{i} - 2\vec{j}$, $\left.\dfrac{\partial U}{\partial s}\right|_{M_0} = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$;

3) линии уровня и $\overrightarrow{gradU}(M_0)$ на рисунке.

Задача 4. Используя двойной интеграл, вычислить статический момент относительно оси *Ox* тонкой однородной пластинки, имеющей форму области *D*, ограниченной заданными линиями: $xy=4,\ 2x=y^2,\ y=3$. Построить чертеж области интегрирования.

Указание. Считать плотность вещества $\gamma(x,y)\equiv 1$.

Решение.

Область *D* (рис. 11) представляет собой криволинейный треугольник *MNK*, где $N\left(\frac{4}{3},3\right)$, $K\left(\frac{9}{2},3\right)$. Для определения координат точки *M* решаем систему уравнений: $\begin{cases} xy=4, \\ 2x=y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y^2/2, \\ y^3/2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y^2/2, \\ y^3=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow M(2,2).$

Область *D* – правильная в направлении оси *Ox*, она задается системой неравенств: $D:\begin{cases} 2\le y\le 3, \\ 4/y\le x\le y^2/2, \end{cases}$ где $x=\frac{4}{y}$, $x=\frac{y^2}{2}$ – это уравнения линий, ограничивающих область слева и справа.

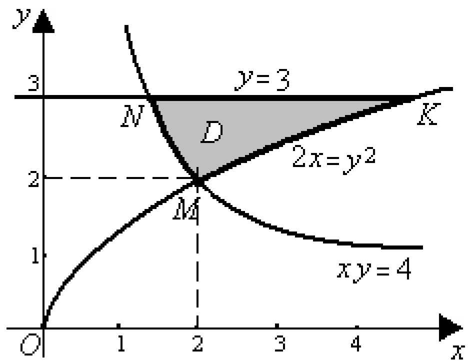

Рис. 11.

Найдем статический момент пластинки *MNK* относительно оси *Ox*:

$$M_x=\iint\limits_D y\cdot\gamma(x,y)\,dS=\left[\gamma(x,y)\equiv 1\right]=\iint\limits_D y\,dS.$$

Для вычисления двойного интеграла сводим его к повторному интегралу в соответствии с системой неравенств, задающих область *D*:

$$M_x=\iint\limits_D y\,dS=\int_2^3 dy\int_{4/y}^{y^2/2} y\,dx=\int_2^3 y\left(\int_{4/y}^{y^2/2}dx\right)dy=\int_2^3 y\cdot x\Big|_{x=4/y}^{x=y^2/2}dy=\int_2^3 y\left(\frac{y^2}{2}-\frac{4}{y}\right)dy=$$

$$=\int_2^3\left(\frac{y^3}{2}-4\right)dy=\left(\frac{y^4}{8}-4y\right)\Bigg|_2^3=\frac{81}{8}-12-\frac{16}{8}+8=\frac{65}{8}-4=\frac{65-32}{8}=\frac{33}{8}=4{,}125.$$

Ответы: M_x = 4,125 ед. стат. момента; область интегрирования на рисунке.

Задача 5. Используя тройной интеграл в цилиндрической системе координат, вычислить массу кругового цилиндра, нижнее основание которого лежит в плоскости *xOy*, а ось симметрии совпадает с осью *Oz*, если заданы радиус основания *R* = 0,5, высота цилиндра *H* = 2 и функция плотности $\gamma = 4\rho^2 + 6\rho^4 + 1$, где ρ – полярный радиус точки.

Решение.

Массу кругового цилиндра можно вычислить, используя тройной интеграл по области V:

$$m = \iiint\limits_V \gamma(x, y, z) dv ,$$

где γ – функция плотности, а V – область, соответствующая цилиндру.

Переходя к трехкратному интегралу в цилиндрических координатах, получаем:

$$m = \iiint\limits_V \gamma(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\, \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho\, d\rho \int\limits_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} (4\rho^2 + 6\rho^4 + 1)\, dz ,$$

где область интегрирования V (круговой цилиндр) можно задать системой неравенств: $\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ 0 \le \rho \le R, \\ 0 \le z \le H, \end{cases}$ при $R = 0{,}5$ и $H = 2$.

Для определения массы цилиндра нужно вычислить трехкратный интеграл:

$$m = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{0,5} \rho\, d\rho \int\limits_0^2 (4\rho^2 + 6\rho^4 + 1) dz = \left[\begin{matrix} 4\rho^2 + 6\rho^4 + 1 \\ \text{не зависит от } z \end{matrix} \right] = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{0,5} (4\rho^2 + 6\rho^4 + 1)\rho\, d\rho \int\limits_0^2 dz .$$

Вычислим внутренний интеграл по переменной z: $\int\limits_0^2 dz = z\Big|_0^2 = 2$.

Затем находим интеграл по переменной ρ:

$$\int\limits_0^{0,5} 2(4\rho^2 + 6\rho^4 + 1)\rho\, d\rho = 2\int\limits_0^{0,5} (4\rho^3 + 6\rho^5 + \rho)\, d\rho = 2\left(\rho^4 + \rho^6 + \frac{\rho^2}{2} \right)\Bigg|_0^{0,5} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^3} \right) = 2\frac{4+1+8}{2^6} = \frac{13}{32}.$$

Третий этап – вычисление внешнего интеграла по переменной φ:

$$m = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{13}{32} \right) d\varphi = \frac{13}{32}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{13}{32} \cdot 2\pi = \frac{13}{16}\pi \approx 2{,}55 .$$

Ответ: $m = \dfrac{13}{16}\pi \approx 2{,}55$ ед. массы.

Задача 6. Дано дифференциальное уравнение 1-го порядка: $\mathrm{ctg}x \cdot y' + y = 0$ и точка $M\left(\dfrac{\pi}{3};1\right)$. Определить тип дифференциального уравнения. Найти общее решение дифференциального уравнения, уравнение интегральной кривой, проходящей через точку M и уравнения еще 4-х интегральных кривых (любых). Построить все эти кривые в системе координат.

Решение. Данное дифференциальное уравнение – уравнение с разделяющимися переменными. Заменим y' на $\dfrac{dy}{dx}$ и разделим переменные, умножая обе части уравнения на $\dfrac{\mathrm{tg}x\,dx}{y}$: $\quad \mathrm{ctg}x\dfrac{dy}{dx} = -y \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{y} = -\mathrm{tg}x\,dx$.

Интегрируя полученное равенство, получим:

$$\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{\sin x}{\cos x}dx + C \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dy}{y} = \int\frac{d(\cos x)}{\cos x}dx + C \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln|\cos x| + \ln|C_1|,$$

откуда $\ln|y| = \ln|C_1 \cdot \cos x| \quad \Rightarrow \quad y = \pm C_1\cos x$. Заменяя $\pm C_1 = C$, запишем общее решение данного уравнения: $y = C\cos x$.

Найдем уравнение интегральной кривой, проходящей через точку $M\left(\dfrac{\pi}{3};1\right)$, т.е. частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию: $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 1.$ Для этого подставим в общее решение вместо x, y числа $\dfrac{\pi}{3}$, 1 соответственно: $1 = C\cos\dfrac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad 1 = \dfrac{1}{2}C \quad \Rightarrow \quad C = 2$. Подставляя найденное значение C в общее решение, получим искомое частное решение (уравнение интегральной кривой, проходящей через точку M): $y_1 = 2\cos x$.

Найдем уравнения еще нескольких интегральных кривых.

$$C = 0 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 0; \qquad C = 1 \quad \Rightarrow \quad y_3 = \cos x;$$
$$C = -1 \quad \Rightarrow \quad y_4 = -\cos x; \qquad C = -2 \quad \Rightarrow \quad y_5 = -2\cos x.$$

Построим все эти кривые в системе координат.

Ответы:

$y = C\cos x$;

$y_1 = 2\cos x,\ \ y_2 = 0,$

$y_3 = \cos x,\ \ y_4 = -\cos x,$

$y_5 = -2\cos x.$

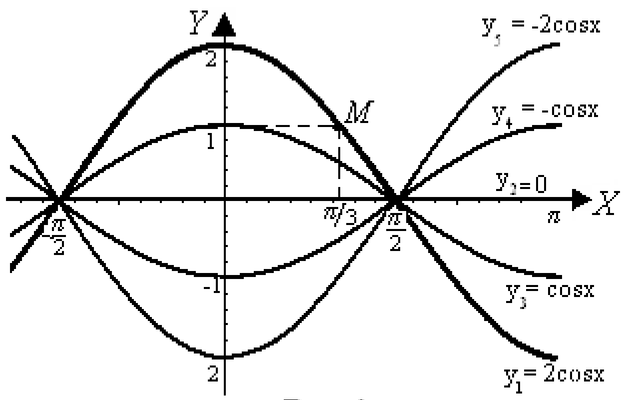

Рис. 9.

<u>Задача 7.</u> Дано дифференциальное уравнение 2-го порядка: $y'' + 3y' - 4y = e^{-x}(\cos 3x + 8\sin 3x)$. Определить тип дифференциального уравнения и найти его общее решение, используя метод неопределенных коэффициентов.

<u>Решение.</u> Уравнение $y'' + 3y' - 4y = e^{-x}(\cos 3x + 8\sin 3x)$ – это линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение имеет вид $y = y_0 + \tilde{y}$. Найдем его в 2 этапа.

1 этап. Построим общее решение y_0 соответствующего однородного уравнения $y'' + 3y' - 4y = 0$. Составим для него характеристическое уравнение $k^2 + 3k - 4 = 0$ и найдем его корни: $k_1 = -4,\ \ k_2 = 1$. Вид общего решения $y_0 = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x}$.

2 этап. Построим частное решение $\tilde{y}$ данного неоднородного уравнения при помощи метода неопределенных коэффициентов. В заданном уравнении $f(x) = e^{-x}(\cos 3x + 8\sin 3x)$ – правая часть 2-го специального вида: $f(x) = e^{\alpha x} \cdot (M\cos\beta x + N\sin\beta x)$, где $\alpha = -1,\ \beta = 3,\ M = 1,\ N = 8$. Числа $\alpha \pm \beta i = -1 \pm 3i \neq k_{1,2}$, тогда частное решение $\tilde{y}$ будем искать в виде:

$$\tilde{y} = e^{-x}(A\cos 3x + B\sin 3x),$$

где A и B – неизвестные постоянные. Подставим $\tilde{y},\ \tilde{y}',\ \tilde{y}''$ в данное неоднородное уравнение:

$$\begin{array}{r|l}
-4 & \tilde{y} = e^{-x}(A\cos 3x + B\sin 3x), \\
3 & \tilde{y}' = -e^{-x}(A\cos 3x + B\sin 3x) + e^{-x}(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x), \\
1 & \tilde{y}'' = e^{-x}(A\cos 3x + B\sin 3x) - e^{-x}(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) - \\
 & \quad - e^{-x}(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) + e^{-x}(-9A\cos 3x - 9B\sin 3x), \\
\hline
\end{array}$$

$$-15e^{-x}(A\cos 3x + B\sin 3x) + e^{-x}(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) \equiv e^{-x}(\cos 3x + 8\sin 3x).$$

Сократим обе части тождества на e^{-x} $(e^{-x} \neq 0)$ и приравняем коэффициенты при $\cos 3x$ и при $\sin 3x$ в левой и правой частях тождества.

$$\begin{array}{r|l}
\text{При } \cos 3x & \begin{cases} -15A + 3B = 1, \\ -15B - 3A = 8. \end{cases} \\
\text{при } \sin 3x &
\end{array}$$

Решая полученную систему двух уравнений с двумя неизвестными, находим $A = -\dfrac{1}{6},\ \ B = -\dfrac{1}{2}$. Подставив найденные значения A и B в выражение $\tilde{y}$, получим частное решение неоднородного уравнения:

$$\tilde{y} = e^{-x}\left(-\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\sin 3x\right).$$

Объединяя результаты 2-х этапов, запишем ответ – общее решение данного уравнения.

Ответ: $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x} + e^{-x}\left(-\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\sin 3x\right).$

<u>Задача 8.</u> Дана система линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка $\begin{cases} x' = -4x - 6y \\ y' = -4x - 2y \end{cases}$ Найти общее решение методом повышения порядка.

<u>Решение.</u> Для решения системы методом повышения порядка исключим из нее одну из функций – $y(t)$.

Выразим $y(t)$ из первого уравнения системы: $y = \frac{1}{6}(-4x - x')$, продифференцируем ее: $y' = \frac{1}{6}(-4x' - x'')$ и подставим y и y' во второе уравнение: $\frac{1}{6}(-4x' - x'') = -4x - \frac{2}{6}(-4x - x') \Rightarrow 4x' + x'' = 24x + 2(-4x - x')$

После упрощения получаем дифференциальное уравнение 2-го порядка относительно функции $y(x)$: $\quad x'' + 6x' - 16x = 0$.

Это линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Найдем его общее решение, составив характеристическое уравнение

$k^2 + 6k - 16 = 0$ и найдем корни: $k_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2}$, $k_1=2$, $k_2=-8$ – корни действительные различные, определим вид общего решения однородного уравнения: $x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-8t}$. Найдем вторую неизвестную функцию:

$$y = \frac{1}{6}(-4x - x') = \frac{1}{6}\left(-4C_1 e^{2t} - 4C_2 e^{-8t} - 2C_1 e^{2t} + 8C_2 e^{-8t}\right) = -C_1 e^{2t} + \frac{2}{3} C_2 e^{-8t}$$

Ответ: $x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-8t}$; $y = -C_1 e^{2t} + \frac{2}{3} C_2 e^{-8t}$